



**Universidade de Aveiro** Matemática  
Ano 2008

## **Ana Cristina Rodrigues Pinto   Soluções Fundamentais dos operadores discretos de Laplace e Dirac**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações (ramo Ciências da Computação), realizada sob a orientação científica da Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Paula Cristina Supardo Machado Marques Cerejeiras, Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Dedico este trabalho à minha orientadora, Professora Doutora Paula Cerejeiras, pela orientação científica, disponibilidade, apoio e incentivo constante.

Aos meus pais, irmão e toda a minha família por acreditarem em mim e me ajudarem a ultrapassar todas as dificuldades.

Ao José António, por estar sempre presente, incentivando-me a ser sempre melhor, e por ser um exemplo de coragem e perseverança.

Às minhas grandes amigas, Sara, Sandra, Susana, Solange, Sandrina, Sílvia e Filomena, por me terem acompanhado em mais uma caminhada, partilhando as alegrias e tristezas, dúvidas e preocupações.

Aos meus tesouros, Samuel, André, David, Leonardo, Salomé, Duarte e Ricardo, por encherem a minha vida de alegria e esperança no futuro.

## **Júri**

Presidente

Prof. Dr. António Manuel Rosa Pereira Caetano,  
Professor Associado com Agregação do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Orientadora

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup>. Paula Cristina Supardo Machado Marques Cerejeiras,  
Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Arguente

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maria Joana Feijão Ehrhardt Soares.  
Professora Associada do Departamento de Matemática da Universidade do Minho.



**Palavras-chave**

Discretização, diferenças finitas, equação de diferenças, transformada discreta de Fourier, operadores de Laplace e de Dirac, soluções fundamentais discretas.

**Resumo**

A presente dissertação tem por objectivo a construção de soluções fundamentais discretas para os operadores discretos de Laplace e de Dirac. No primeiro capítulo discutiremos alguns aspectos básicos da discretização de funções, respectivos domínios e representação discretas das suas derivadas parciais. Esta representação dependerá do ponto do domínio em que nos encontrarmos e do tipo de aproximação efectuada, como veremos. No segundo capítulo lembraremos a transformada de Fourier contínua e suas propriedades, para em seguida, introduzirmos a transformada de Fourier discreta e suas propriedades e teoremas mais relevantes. Finalmente, no último capítulo serão definidos os operadores de Laplace e Dirac, nos casos contínuo e discreto, bem como algumas das suas propriedades que ajudarão na construção das soluções fundamentais para os equivalentes discretos destes operadores.

**Keywords**

Discretization, finite differences, difference equation, discrete Fourier transform, Laplace and Dirac operators, discrete fundamental solutions.

**Abstract**

The purpose of the present dissertation is the construction of discrete fundamental solutions for the Laplace and Dirac discrete operators.

In the first chapter, we will discuss some basic aspects of discretization of functions, their domains and the discrete representation of their partial derivatives. These representations will depend on the localization of the point of the domain and the approximation type, as we will see.

In second chapter we will remember the continuous Fourier transform and its properties so that afterwards we can introduce the discrete Fourier transform, its properties and relevant theorems.

Finally, in the last chapter we will define the Laplace and Dirac operators in continuous and discrete case, as well as we will give some of their properties that will help in the construction of the fundamental solutions to the equivalent discrete of these operators.

# Índice

<b>Introdução</b>	<b>ii</b>
<b>1 Aspectos Básicos de Discretização</b>	<b>1</b>
1.1 Diferenças Finitas . . . . .	3
1.1.1 Diferenças Finitas de Primeira Ordem . . . . .	3
1.1.2 Diferenças Finitas de Segunda Ordem . . . . .	6
1.1.3 Diferenças Finitas em Pontos de Fronteira . . . . .	9
1.2 Equações de Diferenças . . . . .	12
<b>2 Transformada discreta de Fourier</b>	<b>15</b>
2.1 Transformada de Fourier Clássica . . . . .	15
2.2 Transformada de Fourier discreta . . . . .	19
<b>3 Soluções Fundamentais de Operadores Discretos</b>	<b>25</b>
3.1 Noções Básicas sobre Quaterniões . . . . .	25
3.2 Conceito de Solução Fundamental . . . . .	26
3.3 Operador discreto de Laplace . . . . .	28
3.3.1 Definição e Propriedades . . . . .	28
3.3.2 Construção da solução fundamental . . . . .	30
3.4 Operador discreto de Dirac . . . . .	31
3.4.1 Definição e Propriedades . . . . .	31
3.4.2 Construção da solução fundamental . . . . .	34
3.5 Relação entre os operadores discretos de Laplace e Dirac . . . .	39
<b>Conclusão</b>	<b>41</b>

# Introdução

O objectivo do presente trabalho é descrever a construção de uma solução fundamental discreta para dois operadores importantes na análise Matemática: o operador de Laplace e o operador de Dirac. É usual encontrar estes dois operadores em equações que modelam fenómenos físicos pelo que a resolução de equações de derivadas parciais está intimamente associada às suas soluções fundamentais. Contudo, com este trabalho, pretende-se ir mais longe, tentando construir uma solução fundamental discreta para cada um destes operadores, por forma a efectuar o tratamento numérico destas equações.

Se estes operadores aparecem frequentemente associados a funções reais de variável real, contínuas, então o primeiro passo será entender como é possível, a partir de uma função contínua, encontrar uma sua equivalente discreta. Este processo é designado por *discretização*.

Pensando um pouco na origem etimológica desta palavra, facilmente percebemos que ela deriva da palavra “descontínuo”, que significa “constituente de uma coisa separada; individual; distinto; consistindo em partes distintas desconectadas”. Mas o que significa *discretização* no contexto da Matemática e mais precisamente na resolução de equações diferenciais parciais? Sabemos que as soluções analíticas destas equações envolvem expressões que dão a variação das variáveis dependentes, continuamente, ao longo do domínio. Em contrapartida, soluções numéricas podem dar resposta apenas a pontos discretos do domínio. Desta forma, podemos definir discretização como o processo pelo qual uma expressão matemática é aproximada por expressões análogas, mas diferentes, que atribuem valores apenas a um número finito de pontos discretos (ou volumes) do domínio, designadas diferenças finitas. Existem vários métodos de discretização, sendo os mais comuns e os mais usados na resolução de equações de derivadas parciais o Método das Diferenças Finitas, o Método de Volume Finito e o Método de Elemento Finito. No presente trabalho, iremos dar ênfase ao primeiro método, colo-



cando de parte os outros dois.

Assim, o primeiro capítulo destina-se à construção das ditas diferenças finitas mais comuns para representar derivadas parciais. Como esta construção parte de funções de domínio contínuo para um domínio discreto, pode acontecer que os pontos deste domínio sejam pontos interiores ou pontos de fronteira. O método para a determinação das diferenças finitas é diferente nos dois casos, sendo por isso estudada a sua construção em ambos os casos. Após a aproximação das derivadas parciais é então possível construir o equivalente discreto de uma equação diferencial parcial contínua, designada por equação de diferenças.

Para a construção das soluções fundamentais pretendidas, é necessária a teoria das transformadas discretas de Fourier. Desta forma, o segundo capítulo é destinado à análise desta teoria. Começa-se por apresentar as transformadas de Fourier no caso contínuo, referindo-se as propriedades e teoremas mais importantes, não sendo estes demonstrados neste trabalho. Seguidamente, apresenta-se o equivalente discreto destas transformadas, propriedades e teoremas relevantes na construção das ditas soluções fundamentais.

Finalmente, no terceiro capítulo serão analisados os dois operadores referidos. Em cada um deles, começa-se por fazer referência ao caso contínuo, extendendo depois o estudo ao caso discreto, onde serão demonstradas todas as propriedades relevantes. Este trabalho é finalizado com a relação existente entre os operadores de Laplace e de Dirac, quer no caso contínuo quer no caso discreto.

# Capítulo 1

## Aspectos Básicos de Discretização

Considere-se uma função  $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Para efeitos de implementação numérica, é necessário construir o equivalente discreto desta função. Começaremos, assim, por discretizar o seu domínio  $G$ .

**Definição 1.1** (Discretização de domínio). *Fixe-se o espaçamento  $\Delta x_i (\neq 0)$  a atribuir a cada eixo coordenado  $Ox_i$ . Define-se discretização do domínio  $G$  associado ao vector espaçamento  $\vec{\Delta x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ , e denota-se por domínio discreto  $G^\#$ , ao conjunto de todos os pontos*

$$P_{m_1, \dots, m_n} = (m_1 \Delta x_1, m_2 \Delta x_2, \dots, m_n \Delta x_n) \in G,$$

onde  $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ . Os pontos  $P_{m_1, \dots, m_n}$  designam-se por pontos de grelha, ou pontos de malha.

No que se segue, diremos que  $G$  constitui o domínio contínuo da função, sendo que  $G^\#$  representa o seu equivalente discreto, ou domínio discreto.

Na Figura (1.1) encontra-se um exemplo de uma discretização de um domínio em  $\mathbb{R}^2$ . De notar que é possível discretizar domínios em que o espaçamento segundo uma dada direcção se altera conforme a necessidade (ditas discretizações adaptativas) mas este estudo não será aqui feito e iremos apenas considerar um espaçamento uniforme em cada direcção coordenada. Note-se, portanto, que sendo  $P_{m_1, m_2} = (m_1 \Delta x, m_2 \Delta y)$  um ponto da grelha  $G^\#$ , então o ponto imediatamente à direita de  $P_{m_1, m_2}$  é  $P_{m_1+1, m_2}$  e o

ponto imediatamente à esquerda é  $P_{m_1-1,m_2}$ ; analogamente para os pontos imediatamente acima e abaixo de  $P_{m_1,m_2}$ .

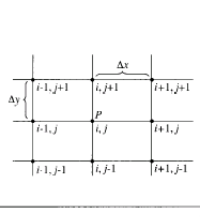


Figura 1.1: Exemplo de uma grelha em  $\mathbb{R}^2$

Denotaremos por  $Rf$  a restrição da função de variável contínua  $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  à grelha  $G^\#$ , ou seja,  $Rf = f|_{G^\#}$ . Sempre que for claro do contexto a qual das funções nos referimos (a contínua ou a discreta), usaremos a notação simplificada  $f$ .

No sentido de resolver agora problemas envolvendo derivadas parciais, torna-se necessário estudar o comportamento do análogo discreto destas para as funções envolvidas. Obviamente, este processo de discretização (tanto das funções quanto das suas derivadas parciais) comporta erros entre a real solução da EDP e a solução do seu análogo discreto, a construir.

Para uma EDP em  $\mathbb{R}^3$ , quando existe uma solução analítica, esta proporciona, em geral, valores de um campo de fluxo num instante  $t$  no ponto do espaço  $(x, y, z)$ . Todavia, em termos computacionais, apenas é conhecido um número discreto de valores deste campo. Se as derivadas parciais das referidas equações forem substituídas por convenientes quocientes de diferenças algébricas, então as equações diferenciais parciais originais são totalmente substituídas por um sistema de equações algébricas (em termos dos pontos de grelha do domínio), passível de resolução computacional. Diremos então que as equações diferenciais parciais originais foram discretizadas em termos de diferenças finitas.

## 1.1 Diferenças Finitas

Neste ponto do trabalho, tem-se como objectivo construir as fórmulas básicas de discretização para diferenças finitas e, ao mesmo tempo, chamar a atenção para a exactidão dessas mesmas fórmulas. Para a definição e propriedades das diferenças finitas, restringir-nos-emos, sem perca de generalidade, ao caso da dimensão  $n = 2$ .

O método das diferenças finitas consiste, sucintamente, em substituir uma derivada parcial por um quociente algébrico de diferenças apropriado, isto é, uma diferença finita. Irão ser desenvolvidos três tipos de diferenças finitas de 1<sup>a</sup> ordem: a diferença finita para a frente, a diferença finita para trás e a diferença finita central. Por sua vez, cada uma destas pode ser aplicada em ordem à variável  $x$  ou  $y$ , consoante a direcção pretendida.

### 1.1.1 Diferenças Finitas de Primeira Ordem

As representações mais comuns das diferenças finitas para as derivadas são baseadas na expansão em série de Taylor de uma dada função real de variável real  $f$  em torno de um ponto  $x_0 = a$ , série esta que designaremos por  $Tf(x)$ . Relembremos que

$$Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n, \quad (1.1)$$

sendo esta equação válida sob certas condições de regularidade da função  $f$ . Para mais detalhes consultar [2].

Para efeitos de simplificação de notação, escreveremos  $u_{i,j} = f(P_{i,j})$ , ou seja, o valor de  $f$  no ponto da grelha  $P_{i,j} \in G^\#$ .

Iniciemos com o equivalente discreto da componente horizontal da velocidade num ponto interior à grelha, isto é, num ponto  $P_{i,j}$  em torno do qual (esquerda, direita, em cima, em baixo) existem outros pontos da grelha. Sendo  $u_{i,j}$  o valor de  $f$  no ponto  $P_{i,j}$ , então a componente horizontal da velocidade nesse ponto pode ser expressa em função da expansão da série de Taylor em torno desse ponto, da seguinte forma

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{P_{i,j}} \Delta x + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{P_{i,j}} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right)_{P_{i,j}} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (1.2)$$

Sob certas condições de regularidade de  $f$  (que não discutiremos aqui) esta equação expressa o valor exacto de  $u_{i+1,j}$ , podendo ser resolvida em ordem a  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_{i,j}}$  e obtendo-se

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_{i,j}} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{P_{i,j}} \frac{\Delta x}{2} - \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{P_{i,j}} \frac{(\Delta x)^2}{6} + \dots \quad (1.3)$$

O primeiro termo do lado direito,

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x},$$

é assim uma aproximação do valor da derivada parcial de  $f$  no ponto  $P_{i,j}$  em ordem a  $x$ , representativa de  $\frac{\partial f}{\partial x}(P_{i,j})$ .

Os restantes termos

$$\mathbf{R}^+ f_{P_{i,j}} := - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{P_{i,j}} \frac{(\Delta x)}{2} - \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{P_{i,j}} \frac{(\Delta x)^2}{6} + \dots \quad (1.4)$$

constituem o *erro de truncatura no ponto*  $P_{i,j}$ , de  $1^{\text{a}}$  ordem.

Note-se que, sendo  $f$  um polinómio do primeiro grau, então  $\mathbf{R}^+ f_{P_{i,j}} = 0$ . A Equação (1.3) pode ainda ser escrita na forma

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(P_{i,j}) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \mathbf{R}^+ f_{P_{i,j}} \quad (1.5)$$

onde  $\mathbf{R}^+ f_{P_{i,j}} = O(\Delta x)$ .

Denotaremos por

$$\partial_{\Delta x}^+ f(P_{i,j}) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \quad (1.6)$$

a *diferença finita para a frente de  $1^{\text{a}}$  ordem de  $f$  no ponto  $P_{i,j}$* , que aproxima a derivada exacta  $\frac{\partial f}{\partial x}(P_{i,j})$ , com erro associado dado por  $\mathbf{R}^+ f_{P_{i,j}}$  que nos diz o valor do erro cometido nesta aproximação.

A Equação (1.6) utiliza apenas a informação à direita do ponto  $P_{i,j}$ , não sendo usada nenhuma informação à esquerda deste, o que justifica o seu nome de diferença finita para a frente.

Determinada a diferença finita para a frente de  $1^{\text{a}}$  ordem, como aproximação da componente horizontal da velocidade, semelhante pode ser feito

usando a informação de  $f$  no ponto à esquerda de  $P_{i,j}$ . Assim, aplicando a expansão da série de Taylor em torno deste ponto, obtém-se

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_{i,j}} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{P_{i,j}} \frac{(\Delta x)^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{P_{i,j}} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (1.7)$$

Resolvendo esta equação em ordem a  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_{i,j}}$ , obtém-se

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_{i,j}} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \mathbf{R}^- f_{P_{i,j}}. \quad (1.8)$$

No segundo termo desta igualdade é usada apenas a informação de  $f$  no ponto anterior a  $P_{i,j}$ , não sendo usada nenhuma informação à direita deste ponto. Assim, e à semelhança do caso anterior, denotaremos por

$$\partial_{\Delta x}^- f(P_{i,j}) = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad (1.9)$$

a *diferença finita para trás* de  $f$  no ponto  $P_{i,j}$ , a qual consiste de novo numa aproximação da derivada exacta  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_{i,j}}$ , com erro associado dado agora por  $\mathbf{R}^- f_{P_{i,j}}$ .

Seguidamente, analisaremos a construção de uma aproximação da derivada exacta  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_{i,j}}$ , utilizando apenas a informação de  $f$  nos pontos à direita e à esquerda de  $P_{i,j}$ , isto é, sem recurso à informação de  $f(P_{i,j})$ .

Sendo  $u_{i,j}$  o valor de  $f$  no ponto  $P_{i,j}$ , subtraímos a Equação (1.7) à Equação (1.2), o que determina que

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_{i,j}} \Delta x + 2 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{P_{i,j}} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (1.10)$$

Resolvendo agora em ordem a  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_{i,j}}$ , obtemos a equação

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_{i,j}} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \mathbf{R}^c f_{P_{i,j}}. \quad (1.11)$$

Portanto, a aproximação à derivada exacta  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_{i,j}}$ , que denotaremos por

$$\partial^c f(P_{i,j}) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (1.12)$$

designa-se por *diferença finita central de 1ª ordem de  $f$  no ponto  $P_{i,j}$* .

Sumariando, para uma função real  $f$  de classe  $C^2$  num aberto  $G \subset \mathbb{R}^2$ , temos

**Definição 1.2** (Diferenças finitas de 1ª ordem de  $f$ ). *Dado um ponto  $P_{i,j}$  interior à grelha  $G^\#$ , definem-se as*

1. *diferenças finitas para a frente de 1ª ordem de  $f$  no ponto  $P_{i,j}$*

$$\partial_{\Delta x}^+ f(P_{i,j}) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \quad e \quad \partial_{\Delta y}^+ f(P_{i,j}) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta y};$$

2. *diferenças finitas para trás de 1ª ordem de  $f$  no ponto  $P_{i,j}$*

$$\partial_{\Delta x}^- f(P_{i,j}) = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} \quad e \quad \partial_{\Delta y}^- f(P_{i,j}) = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\Delta y};$$

3. *diferenças finitas centrais de 1ª ordem de  $f$  no ponto  $P_{i,j}$*

$$\partial_{\Delta x}^c f(P_{i,j}) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad e \quad \partial_{\Delta y}^c f(P_{i,j}) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}.$$

### 1.1.2 Diferenças Finitas de Segunda Ordem

Em várias aplicações de equações diferenciais parciais, a exactidão de primeira ordem não é suficiente. Isto é particularmente óbvio nas EDP's que envolvam derivadas de 2ª ordem, ou seja, potenciais de campo de fluxo. Assim sendo, o objectivo desta secção é construir diferenças finitas com exactidão de 2ª ordem, para uma dada função  $f : \mathbb{R}_{\Delta x, \Delta y}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , no ponto de grelha  $P_{i,j}$ .

Tal como na secção anterior, é possível obter diferenças finitas de 2ª ordem para a frente, para trás e centrais. Contudo, visando o necessário para o desenvolvimento deste trabalho, iremos considerar apenas as diferenças finitas centrais.

Continuando a análise da série de Taylor, considerem-se as Equações (1.2) e (1.7). Adicionando-as obtém-se

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 2u_{i,j} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{P_{i,j}} (\Delta x)^2 + \left( \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right)_{P_{i,j}} \frac{(\Delta x)^4}{12} + \dots \quad (1.13)$$

e, resolvendo-a em ordem a  $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{P_{i,j}}$ , vem que

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(P_{i,j}) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \mathbf{R}^c f_{P_{i,j}}. \quad (1.14)$$

Na equação anterior, é utilizada informação em três pontos da grelha, a saber, o próprio ponto  $P_{i,j}$  e os pontos à sua direita e à sua esquerda, pelo que denotaremos por

$$\partial_{\Delta x, \Delta x}^c f(P_{i,j}) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (1.15)$$

a *diferença finita central de 2ª ordem de  $f$  no ponto  $P_{i,j}$* , em ordem a  $\Delta x$ , que consiste numa aproximação à derivada exacta  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_{i,j})$ , com um erro associado dado por  $\mathbf{R}^c f_{P_{i,j}}$ .

Uma expressão análoga é da mesma forma obtida para a *diferença finita central de 2ª ordem de  $f$  no ponto  $P_{i,j}$* , em ordem a  $\Delta y$ , que denotaremos por

$$\partial_{\Delta y, \Delta y}^c f(P_{i,j}) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}, \quad (1.16)$$

a qual consiste numa aproximação à derivada exacta  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_{i,j})$ , com um erro associado dado por  $\mathbf{R}^c f_{P_{i,j}}$ .

Para o caso das derivadas mistas, tais como  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ , o quociente das diferenças finitas é também ele determinado à custa dos equivalentes das Equações (1.2) e (1.7) aplicadas a  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

Comecemos pelo equivalente à Equação (1.2).

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_{i+1,j}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_{i,j}} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_{P_{i,j}} \Delta x + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_{P_{i,j}} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \\ &\quad \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}\right)_{P_{i,j}} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \end{aligned} \quad (1.17)$$



e de uma forma análoga, temos o equivalente da Equação (1.7).

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{P_{i-1,j}} &= \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{P_{i,j}} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{P_{i,j}} \Delta x + \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right)_{P_{i,j}} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \\ &\quad \left( \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} \right)_{P_{i,j}} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \end{aligned} \quad (1.18)$$

Agora, subtraindo as Equações (1.17) e (1.18) e resolvendo a equação resultante em ordem a  $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{P_{i,j}}$ , vem que

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{P_{i,j}} = \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{P_{i+1,j}} - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{P_{i-1,j}}}{2\Delta x} - \left( \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} \right)_{P_{i,j}} \frac{(\Delta x)^2}{12} + \dots \quad (1.19)$$

Na equação anterior, o primeiro termo do lado direito envolve as derivadas parciais de  $f$  nos pontos  $P_{i+1,j}$  e  $P_{i-1,j}$ . Pela análise efectuada na secção anterior, estas derivadas parciais podem ser aproximadas por diferenças finitas centrais de 1<sup>a</sup> ordem. Assim sendo, a equação anterior pode ser escrita como

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{P_{i,j}} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} + \mathbf{R}^c f_{P_{i,j}} \quad (1.20)$$

e denotaremos por

$$\partial_{\Delta x \Delta y}^c f(P_{i,j}) = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y} \quad (1.21)$$

a *diferença central mista de 2<sup>a</sup> ordem de  $f$  no ponto  $P_{i,j}$*  que aproxima a derivada exacta de 2<sup>a</sup> ordem mista,  $\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{P_{i,j}}$ , com um erro associado dado por  $\mathbf{R}^c f_{P_{i,j}}$ .

Do mesmo modo se procede para as restantes derivadas parciais de 2<sup>a</sup> ordem de  $f$ .

Sumariando, para uma função real  $f$  de classe  $C^2$  numa aberto  $G \subset \mathbb{R}^2$ , temos

**Definição 1.3** (Diferenças finitas centrais de 2<sup>a</sup> ordem de  $f$  num ponto da grelha). *Dado um ponto  $P_{i,j}$  interior à grelha  $G^\#$ , define-se a*

1. *diferença finita central de 2ª ordem de  $f$  no ponto  $P_{i,j}$  em relação a  $\Delta x$*

$$\partial_{\Delta x, \Delta x}^c f(P_{i,j}) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2};$$

2. *diferença finita central de 2ª ordem de  $f$  no ponto  $P_{i,j}$  em relação a  $\Delta y$*

$$\partial_{\Delta y, \Delta y}^c f(P_{i,j}) = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2};$$

3. *diferença finita central de 2ª ordem mista de  $f$  no ponto  $P_{i,j}$*

$$\partial_{\Delta x, \Delta y}^c f(P_{i,j}) = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}.$$

Para terminar esta secção, refira-se que podem ser obtidas muitas outras aproximações para as derivadas parciais tratadas anteriormente. Em particular, quocientes de diferenças finitas mais exactos podem ser conseguidos exibindo a exactidão de 3ª, 4ª ou ordens superiores.

Os vários quocientes de diferenças apresentados até ao momento neste trabalho são as formas usadas mais comuns na aproximação numérica de EDP's de 2ª ordem.

### 1.1.3 Diferenças Finitas em Pontos de Fronteira

Até agora, todas as expressões para as diferenças finitas foram deduzidas usando informação de pontos de grelha interiores à fronteira do domínio. Mas o que acontece se o ponto de grelha estiver na fronteira? Que tipo de diferenciabilidade é possível nesta situação?

Consideremos a Figura (1.2), que ilustra uma porção de um campo de fluxo, com o eixo dos  $y$  perpendicular à fronteira.

Tal como nas secções anteriores, a próxima finalidade deste trabalho é construir aproximações convenientes para as derivadas parciais de uma dada função  $f$ , num ponto de fronteira. Por simplicidade, restringir-nos-emos às diferenças finitas de 1ª ordem.

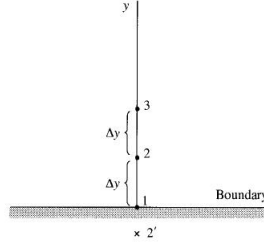


Figura 1.2: Exemplo de um ponto de grelha na fronteira onde  $P_1 = P_{0,0}$  representa o ponto de fronteira, os pontos de grelha  $P_2 = P_{0,1}$  e  $P_3 = P_{0,2}$  a uma distância  $\Delta y$  e  $2\Delta y$  acima da fronteira, respectivamente, e o ponto  $P_{2'} = P_{0,-1}$  a uma distância  $\Delta y$  abaixo da fronteira.

Observemos que os pontos da Figura (1.2), têm a particularidade de se encontrarem sobre o eixo  $Oy$ . Por este motivo, as diferenças finitas que serão construídas aqui dirão respeito à direcção  $y$ , embora o mesmo raciocínio possa ser aplicado para as respectivas diferenças finitas relativamente à direcção  $x$  de uma função  $f$  num ponto de fronteira.

De forma a distinguirmos os pontos interiores à grelha e os pontos fronteiros da mesma, convencionaremos a notação de  $P_i^j$  para um ponto de fronteira na direcção  $y$ .

Consideremos, então, o ponto de fronteira  $P_i^j$  e o valor da função  $f$  neste ponto denotada por  $u_i^j = f(P_i^j)$ .

Se pensarmos na *diferença finita para a frente de  $f$  no ponto  $P_i^j$* , esta é escrita como

$$\partial_{\Delta y}^+ f(P_i^j) = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta y}, \quad (1.22)$$

e não existe problema em determiná-la, uma vez que é conhecida informação de todos os pontos necessários na sua construção.

No entanto, se quisermos construir a *diferença finita para trás* ou a *diferença finita central de  $f$  no ponto  $P_i^j$* , a questão torna-se mais delicada. A definição apresentada na secção das diferenças finitas de 1ª ordem não é aqui válida, tal como é ilustrado pelo ponto  $P_{2'}$  na Figura (1.2). Este ponto está fora do domínio da computação e, de um modo geral, não temos informação sobre  $f$  neste ponto. Assim, para evitar este problema, iremos desenvolver um outro processo alternativo à análise em série de Taylor para construir

uma expressão da diferença finita. Esse processo consiste em utilizar uma aproximação polinomial. Para exemplificação deste método, iremos construir a diferença finita central de 1<sup>a</sup> ordem de  $f$  no ponto de fronteira  $P_i^j$ , observando que a construção da diferença finita para trás de 1<sup>a</sup> ordem é feita através de um raciocínio semelhante.

Vamos assumir que, na fronteira ilustrada na Figura (1.2),  $f$  pode ser expresso pelo polinómio

$$f(y) = a + by + cy^2 \quad (1.23)$$

Consideremos os pontos de grelha  $P_i^j$ ,  $P_i^{j+1}$  e  $P_i^{j+2}$ , com ordenadas  $0$ ,  $\Delta y$  e  $2\Delta y$ , respectivamente. Determinando o valor de  $f$  em cada um dos pontos anteriores, denotados por  $u_i^j$ ,  $u_i^{j+1}$  e  $u_i^{j+2}$ , respectivamente, obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} u_i^j = a \\ u_i^{j+1} = a + b\Delta y + c(\Delta y)^2 \\ u_i^{j+2} = a + 2b\Delta y + 4c(\Delta y)^2 \end{cases}$$

que nos permite obter a seguinte expressão para  $b$

$$b = \frac{-3u_i^j + 4u_i^{j+1} - u_i^{j+2}}{2\Delta y} \quad (1.24)$$

Por outro lado, diferenciando a Equação (1.23) em ordem a  $y$  obtemos a equação

$$\left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{P_i^j} = b + 2cy, \quad (1.25)$$

que estimada na fronteira, onde  $y = 0$ , resulta na equação

$$\left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{P_i^j} = b. \quad (1.26)$$

Combinando as Equações (1.24) e (1.26) obtemos

$$\partial_{\Delta y}^c f(P_i^j) = \frac{-3u_i^j + 4u_i^{j+1} - u_i^{j+2}}{2\Delta y}. \quad (1.27)$$

A equação anterior designa-se por *diferença finita central de  $f$  no ponto de fronteira  $P_i^j$* . Observe-se que esta equação foi obtida usando uma expressão

polinomial em vez da representação em série de Taylor, ilustrando um método alternativo para a construção dos quocientes das diferenças finitas.

É ainda de referir que tanto a Equação (1.22) como a Equação (1.27), apresentam apenas informação de pontos de grelha acima do ponto  $P_i^j$ . Por esse motivo estas diferenças são também chamadas de *diferenças finitas na direcção vertical de  $f$*  no ponto fronteiro  $P_i^j$ .

## 1.2 Equações de Diferenças

Discutida a representação da derivada parcial através de um quociente algébrico da diferença finita, observamos que a maioria das equações diferenciais parciais envolvem um determinado número de termos de derivadas parciais.

Quando, numa equação diferencial parcial, todas as derivadas parciais são substituídas por quocientes de diferenças finitas, a equação algébrica resultante é chamada de *equação de diferenças*. A equação de diferenças é, então, uma representação algébrica de uma equação diferencial parcial.

A essência das soluções da diferença finita em EDP's, é usar os quocientes da diferença deduzidos no subcapítulo anterior para substituir as derivadas parciais que governam as equações de fluxo, resultando num sistema de equações algébricas de diferenças para as variáveis dependentes em cada ponto de grelha. Assim, neste subcapítulo, iremos examinar alguns dos aspectos básicos das equações de diferenças.

Consideremos uma função  $y = H(x, t)$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  em  $\mathbb{R}$  que satisfaz a equação uni-dimensional da condução de calor, com condução térmica  $\alpha$  constante.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (1.28)$$

Pretendemos construir o equivalente discreto desta equação. Consideremos o esboço da grelha espaço / tempo na Figura (1.3).

Nesta figura,  $i, j$  representam, respectivamente, os índices correspondentes às direcções  $x$  e  $t$ . Assim, para cada ponto  $P_{i,j}$  da grelha  $G^\#$  é necessário construir uma equação de diferenças associada à EDP dada.

Se  $P_{i,j}$  for um ponto de fronteira (por exemplo, na direcção  $t$ ) usaremos a notação estabelecida na secção 1.1.3 e as diferenças aí deduzidas.

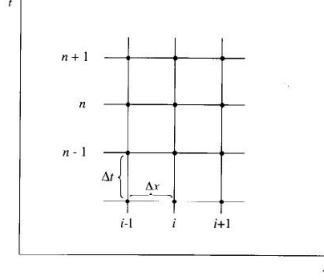


Figura 1.3: Grelha espaço / tempo

Vamos então deduzir o equivalente discreto da EDP dada pela Equação (1.28).

Consideremos  $P_{i,j}$  um ponto interior à grade  $G^\#$ .

Começemos por aproximar a derivada parcial de  $H$  em ordem ao tempo, usando a diferença finita para a frente de 1ª ordem, no ponto  $P_{i,j}$ .

$$\left( \frac{\partial H}{\partial t} \right)_{P_{i,j}} = \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{\Delta t} + \mathcal{R}_1^+ H(P_{i,j}). \quad (1.29)$$

Seguidamente, aproximamos a derivada parcial de 2ª ordem de  $H$  em ordem ao espaço, usando a diferença finita central de 2ª ordem no ponto  $P_{i,j}$ .

$$\left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right)_{P_{i,j}} = \frac{H_{i+1,j} - 2H_{i,j} + H_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \mathcal{R}_2^c H(P_{i,j}). \quad (1.30)$$

Escrevendo a Equação (1.28) como

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0 \quad (1.31)$$

obtemos a seguinte aproximação

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{\Delta t} - \alpha \frac{H_{i+1,j} - 2H_{i,j} + H_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \\ &\quad \mathcal{R}_1^+ H(P_{i,j}) - \alpha \mathcal{R}_2^c H(P_{i,j}). \end{aligned} \quad (1.32)$$

com  $\mathcal{R}H(P_{i,j}) = \mathcal{R}_1^+ H(P_{i,j}) - \alpha \mathcal{R}_2^c H(P_{i,j})$ .

Examinando a equação anterior, observamos que a EDP original

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 0 \quad (1.33)$$

é aproximada pela equação discreta

$$\frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{\Delta t} - \alpha \frac{H_{i+1,j} - 2H_{i,j} + H_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} = 0 \quad (1.34)$$

sendo que o erro cometido na substituição da Equação (1.33) pela Equação (1.34) é avaliado via o máximo dos erros cometidos que, na Equação (1.32), denotámos por  $\mathcal{R}H(P_{i,t})$ , isto é,

$$|\mathcal{R}H(P_{i,t})| \leq |\mathcal{R}_1^+ H(P_{i,j})| + \alpha |\mathcal{R}_2^c H(P_{i,j})|.$$

Desta forma, podemos re-escrever a equação anterior como

$$\frac{H_{i,j+1} - H_{i,j}}{\Delta t} = \alpha \frac{H_{i+1,j} - 2H_{i,j} + H_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (1.35)$$

no ponto interior  $P_{i,j}$  da grelha  $G^\#$ .

Contudo, é importante salientar que a equação de diferenças obtida não é igual à EDP original. A equação de diferenças é uma equação algébrica que, quando escrita em todos os pontos de grelha do domínio, resulta num sistema de equações algébrico que tem tantas equações quantos os números de pontos da grelha. Por sua vez, recorrendo a métodos que não iremos desenvolver neste trabalho, estas equações algébricas são resolvidas numericamente para a variável dependente em todos os pontos de grelha, isto é, para  $H_{i,j}$ ,  $H_{i+1,j}$ ,  $H_{i,j+1}$ ,  $H_{i+1,j+1}$ ,  $H_{i,j+2}$ , etc, gerando assim uma função discreta  $H^\# = H^\#(P_{i,j})$  que aproximará a uma solução analítica de  $H = H(x, t)$ , a menos do erro de truncatura.

Resumindo, é importante reter que o conceito geral de uma solução de diferenças finitas é representar EDP's por meio de sistemas constituídos por equações de diferenças finitas e resolver esses sistemas algébricos com um erro de aproximação o menor possível.

## Capítulo 2

# Transformada discreta de Fourier

A transformada de Fourier é uma transformação que liga o domínio temporal ao domínio de frequência. Assim, esta é particularmente adequada para tratar problemas de vibração de cordas ou de condução de calor em barras (finitas ou não). Todavia, estes problemas assentam na resolução do problema de Dirichlet para a equação de Laplace e recorrem, em geral, à transformada de Fourier das funções envolvidas.

Assim, iniciaremos este capítulo com uma secção onde daremos uma breve descrição da transformada de Fourier e suas propriedades mais importantes. As demonstrações destas serão aqui omitidas, remetendo o leitor para a bibliografia adequada.

Descreveremos de seguida o equivalente discreto desta transformada, suas propriedades e terminaremos com a relação entre estas transformadas.

### 2.1 Transformada de Fourier Clássica

Fourier observou que uma função complexa de variável real, periódica e contínua por partes no seu domínio, era representável em série de funções trigonométricas. Este resultado foi rapidamente extendido ao caso  $n$ -dimensional, salientando a ligação entre o sinal e a respectiva frequência. Foi a partir desta observação que se desenvolveu uma das mais importantes ferramentas da matemática moderna: a análise de Fourier.



Se nada for indicado, consideraremos funções do tipo  $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $z = f(x)$ . As definições, lemas e teoremas a seguir indicados podem ser encontrados em [3] e [4].

**Definição 2.1** (Espaços  $L_p(G)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ). *Designamos por  $L_p(G)$ ,  $1 \leq p < +\infty$  o espaço das funções  $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  para as quais a norma, segundo o integral de Lebesgue,*

$$\|f\|_p := \left( \int_G |f(x)| dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

*é finita.*

No caso particular de  $p = 2$  temos ainda que  $L_2(G)$  é um espaço de Hilbert para o produto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

sendo que

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle.$$

**Definição 2.2** (Transformada de Fourier). *A transformada de Fourier da função  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$  no ponto  $\xi \in \mathbb{R}^n$  é dada pela expressão*

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) := \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx. \quad (2.1)$$

*A função  $\mathcal{F}[f] : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\xi \rightarrow \mathcal{F}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi)$  designa-se por transformada de Fourier de  $f$ .*

É de observar que a transformada de Fourier está bem definida uma vez que para cada  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , temos

$$\left| \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \right| \leq \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \|f\|_1. \quad (2.2)$$

Além disso,  $\mathcal{F}[f]$  é uniformemente contínua em  $\mathbb{R}^n$ , sendo que  $\widehat{f}(\xi) \rightarrow 0$  quando  $|\xi| \rightarrow +\infty$ . Esta propriedade é conhecida como o Lema de Riemann - Lebesgue.

**Exemplo 2.1.** A transformada de Fourier da função Gaussiana  $f(x) = e^{-|x|^2}$  é

$$\widehat{f}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{4}}.$$

Para uma prova detalhada, refira-se [4], pp 4.

Apesar da transformada de Fourier ser um operador linear, a transformada de Fourier do produto de duas funções não é igual ao produto das transformadas de Fourier dessas mesmas funções, isto é,  $\widehat{fg} \neq \widehat{f}\widehat{g}$ . Uma propriedade semelhante pode ser obtida por introdução do operador convolução.

**Definição 2.3** (Operador Convolução). *Sejam  $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ . Então a nova função*

$$h(x) = (f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) g(t) dt$$

*é dita convolução de  $f$  e  $g$ .*

**Lema 2.1.** *Sejam  $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ . Então  $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$ .*

A convolução de funções tem algumas propriedades características da multiplicação usual de funções, tais como a comutatividade, a associatividade, a distributividade e a existência de elemento neutro. Todavia este último requer uma extensão a distribuições, que não iremos estudar neste trabalho.

Um resultado importante à cerca da convolução de funções é o conhecido

**Teorema 2.1** (Teorema da Convolução). *Sejam  $f, g, h \in L_1(\mathbb{R}^n)$  onde  $h$  é a convolução das funções  $f$  e  $g$ . Então*

$$\widehat{h}(\xi) = \widehat{(f * g)}(\xi) = \left(\sqrt{2\pi}\right)^n \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi) \quad (2.3)$$

*para todo o  $\xi \in \mathbb{R}^n$ .*

O teorema seguinte permite determinar a transformada de Fourier inversa de uma função, sendo conhecido pelo

**Teorema 2.2** (Teorema da Transformada Inversa de Fourier). *Se  $f$  e a sua transformada  $\widehat{f}$  estão em  $L_1(\mathbb{R}^n)$ , então*

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi \quad (2.4)$$

*em todo o ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  onde  $f$  é contínua.*

Neste ponto do trabalho, analise-se um pouco o teorema anterior. Observe-se que, nas hipóteses do dito teorema, tanto a função  $f$  considerada, como a sua transformada de Fourier, pertencem ambas a  $L_1(\mathbb{R}^n)$ , ou seja, ambas são absolutamente integráveis. Mas não existe nenhuma garantia de que se  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$  o mesmo aconteça para  $\hat{f}$ .

Um exemplo de  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$  com  $\hat{f} \notin L_1(\mathbb{R}^n)$ , é dado pelo seguinte exemplo.

**Exemplo 2.2.** *A função característica do intervalo  $[-1; 1]$*

$$\mathfrak{N}_{[-1;1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in [-1; 1] \\ 0 & \text{para outros valores} \end{cases}$$

*está em  $L_1(\mathbb{R})$ . Todavia, a sua transformada de Fourier*

$$\hat{\mathfrak{N}}_{[-1;1]}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}(\xi),$$

*não está em  $L_1(\mathbb{R})$ .*

Observe-se porém que esta transformada de Fourier satisfaz

$$\left\| \hat{\mathfrak{N}}_{[-1;1]} \right\|_2 := \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \left| \hat{\mathfrak{N}}_{[-1;1]}(x) \right|^2 dx} < +\infty,$$

isto é,  $\mathfrak{N}_{[-1;1]}(x) \in L_2(\mathbb{R})$ .

O teorema seguinte é conhecido por teorema de Parseval e Plancherel e relaciona em  $L_2(\mathbb{R}^n)$  os produtos internos entre funções e entre as respectivas transformadas de Fourier.

**Teorema 2.3** (Teorema de Parseval e Plancherel). *Sejam  $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ . Então*

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle, \quad (2.5)$$

$$\|f\|_2^2 = \left\| \hat{f} \right\|_2^2. \quad (2.6)$$

Como consequência deste Teorema,  $\mathcal{F} : f \rightarrow \mathcal{F}[f] = \widehat{f}$  pode ser considerado como um operador linear de  $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$  em  $L_2(\mathbb{R}^n)$ . Por outro lado,  $L_2(\mathbb{R}^n)$  é denso em  $L_1(\mathbb{R}^n) \cap L_2(\mathbb{R}^n)$ , pelo que  $\mathcal{F}$  pode ser extendido a um operador de  $L_2(\mathbb{R}^n)$  em  $L_2(\mathbb{R}^n)$ , que preserva a norma, a menos de constante.

A demonstração do seguinte teorema pode ser encontrada em [5].

**Teorema 2.4.** *A transformada de Fourier,  $\mathcal{F}$ , é uma função bijectiva e linear de  $L_2(\mathbb{R}^n)$  em si própria. Por outras palavras, para todo o  $g \in L_2(\mathbb{R}^n)$  corresponde um e um só  $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\widehat{f} = g$ .*

## 2.2 Transformada de Fourier discreta

Sem perda de generalidade, considere-se agora  $\Delta x_i = h$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Denotaremos agora  $\mathbb{R}_{\Delta x_1, \dots, \Delta x_n}^n$  por  $\mathbb{R}_h^n$ . Mais, defina-se para  $G \subset \mathbb{R}_h^n$  o conjunto

$$G^\# = \{hm \in G, m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Suponha-se também a função discreta  $u : G^\# \rightarrow \mathbb{C}$ , restrição de uma função contínua à grelha  $G^\#$ .

**Definição 2.4** (Espaço discreto  $\ell_p(G^\#)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ). *Designamos por  $\ell_p(G^\#)$ ,  $1 \leq p < \infty$  o espaço das funções  $u : G^\# \rightarrow \mathbb{C}$  para as quais a norma discreta*

$$\|u\|_{\ell_p} := \left( \sum_{hm \in \text{int}(G^\#)} |u(hm)|^p h^n \right)^{\frac{1}{p}}$$

*é finita.*

No que se segue, estaremos apenas interessados no caso em que  $G^\# \subset \mathbb{R}_h^3$ .

**Definição 2.5** (Transformada discreta de Fourier). *Seja  $u \in \ell_2(G^\#)$ . A transformada discreta de Fourier de  $u$  no ponto  $\xi \in \mathbb{R}^3$  é definida por*

$$\mathcal{F}_h[u](\xi) = \begin{cases} \frac{h^3}{\sqrt{2\pi}^3} \sum_{hm \in \text{int}(G^\#)} u(hm) e^{ihm \cdot \xi} & \text{se } \xi \in Q_h \\ 0 & \text{se } \xi \notin Q_h, \end{cases}.$$

onde

$$Q_h = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^3 : -\frac{\pi}{h} < \xi_j < \frac{\pi}{h}, j = 1, 2, 3 \right\}.$$

A função  $\xi \rightarrow \mathcal{F}_h[u](\xi)$  designa-se função transformada discreta de Fourier de  $u$ .

**Definição 2.6** (Transformada discreta de Fourier inversa). *Define-se a transformada discreta de Fourier inversa como a transformada de Fourier contínua restricta a*

$$L_2^0(Q_h) = \{f \in L_2(\mathbb{R}^3) : f = 0, \text{ em } \mathbb{R}^3 \setminus Q_h\},$$

e que actua como

$$u = \mathcal{F}_h^{-1}f = R_h(\mathcal{F}f),$$

com  $f \in L_2^0(Q_h)$  e  $u \in \ell_2(G^\#)$ .

Tal como no caso contínuo, temos o

**Teorema 2.5** (Teorema de Parseval e Plancherel). *Sejam  $u, v \in \ell_2(G^\#)$ . Então*

$$\langle u, v \rangle_{\ell_2(G^\#)} = \langle \mathcal{F}_h u, \mathcal{F}_h v \rangle_{L_2^0(Q_h)} = \langle \mathcal{F} \mathcal{F}_h u, \mathcal{F} \mathcal{F}_h v \rangle_{L_2(\mathbb{R}^3)} \quad (2.7)$$

*Demonstração.*

Por simplicidade de cálculos, a demonstração deste teorema será feita para uma dimensão, uma vez que o resultado é extensível a  $\mathbb{R}^n$  e, em particular, a  $\mathbb{R}^3$ .

Aplicando o teorema de Parseval e Plancherel no caso contínuo temos que

$$\langle \mathcal{F} \mathcal{F}_h u(\xi), \mathcal{F} \mathcal{F}_h v(\xi) \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \langle \mathcal{F}_h u(\xi), \mathcal{F}_h v(\xi) \rangle_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Por definição da transformada de Fourier discreta,  $\mathcal{F}_h u(\xi) = 0$  se  $\xi \notin Q_h$ .

Assim, consideremos  $\xi \in Q_h$ . Desta forma

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}_h u(\xi), \mathcal{F}_h v(\xi) \rangle_{L_2(\mathbb{R})} &= \langle \mathcal{F}_h u(\xi), \mathcal{F}_h v(\xi) \rangle_{L_2^0(\mathbb{R})} \\
&= \int_{Q_h} \mathcal{F}_h u(\xi) \overline{\mathcal{F}_h v(\xi)} d\xi \\
&= \int_{Q_h} \left[ \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_{hm \in G^\#} u(hm) e^{ihm \cdot \xi} \right] \\
&\quad \left[ \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_{hn \in G^\#} v(hn) e^{-ihn \cdot \xi} \right] d\xi \\
&= \frac{h^2}{2\pi} \sum_{hm, hn \in G^\#} u(hm) v(hn) \int_{Q_h} e^{ihm \cdot \xi} e^{-ihn \cdot \xi} d\xi \\
&= \frac{h^2}{2\pi} \sum_{hm, hn \in G^\#} u(hm) v(hn) \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ih(m-n) \cdot \xi} d\xi.
\end{aligned}$$

Se  $m \neq n$  então

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ih(m-n) \cdot \xi} d\xi &= \frac{e^{ih(m-n) \frac{\pi}{h} \cdot \xi} - e^{-ih(m-n) \frac{\pi}{h} \cdot \xi}}{ih(m-n)} \\
&= \frac{2h}{m-n} \frac{e^{i(m-n)\pi} - e^{-i(m-n)\pi}}{2i} \\
&= \frac{2h}{m-n} \sin((m-n)\pi) = 0.
\end{aligned}$$

Logo, a expressão acima deduzida é nula.

Seja  $m = n$ . Então

$$\int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ih(m-n) \cdot \xi} d\xi = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} 1 d\xi = \frac{2\pi}{h}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{h^2}{2\pi} \sum_{hm, hn \in G^\#} u(hm) v(hn) \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ih(m-n) \cdot \xi} d\xi &= \frac{h^2}{2\pi} \sum_{hn \in G^\#} u(hn) v(hn) \frac{2\pi}{h} \\
&= \sum_{hn \in G^\#} u(hn) v(hn) h \\
&= \langle u, v \rangle_{\ell_2(G^\#)}
\end{aligned}$$

e o teorema fica provado. □

Observe-se que, do ponto de vista analítico, a transformada de Fourier discreta está bem definida. No entanto, é de referir que existem outras possíveis definições, as quais não serão abordadas neste trabalho.

Seguidamente, serão demonstradas algumas propriedades da transformada de Fourier discreta, que serão úteis posteriormente.

Assim, seja  $I$  o operador identidade e  $u|_{Q_h}$  a restrição de  $u$  ao cubo  $Q_h$ . Então:

1.  $R_h \mathcal{F} \mathcal{F}_h u = u$  com  $u \in \ell_2(G^\#)$ .

*Demonstração.*

A prova desta propriedade será feita para uma dimensão, pois o resultado é extensível a  $\mathbb{R}^3$ .

Em  $\mathbb{R}$ , a transformada de Fourier é dada por:

$$(\mathcal{F}_h u)(\xi) = \begin{cases} \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_{hm \in G^\#} u(hm) e^{ihm \cdot \xi} & \text{se } \xi \in Q_h \\ 0 & \text{se } \xi \notin Q_h \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{F}_h u(\xi))(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}_h u(\xi) e^{-ix \cdot \xi} d\xi \\ &= \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{h}{2\pi} \sum_{hm \in G^\#} u(hm) e^{ihm \cdot \xi} e^{-ix \cdot \xi} d\xi \\ &= \frac{h}{2\pi} \sum_{hm \in G^\#} u(hm) \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ihm \cdot \xi - ix \cdot \xi} d\xi \\ &= \frac{h}{2\pi} \sum_{hm \in G^\#} u(hm) \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{i(hm-x) \cdot \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Para determinar o integral da equação anterior, é preciso ter em atenção duas situações.

Se  $x \neq hm$  então

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{i(hm-x)\cdot\xi} d\xi &= \frac{e^{i(hm-x)\pi/h}}{i(hm-x)} - \frac{e^{-i(hm-x)\pi/h}}{i(hm-x)} \\
&= \frac{2}{hm-x} \frac{e^{i(m\pi - \frac{\pi}{h}x)} - e^{-i(m\pi - \frac{\pi}{h}x)}}{2i} \\
&= \frac{2}{hm-x} \sin\left(m\pi - \frac{\pi}{h}x\right).
\end{aligned}$$

Se  $x = hm$  então

$$\int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{i(hm-x)\cdot\xi} d\xi = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{i(hm-mh)\cdot\xi} d\xi = \frac{2\pi}{h}.$$

Assim, tem-se, para  $x = hn$ :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}\mathcal{F}_h u)(x) &= (\mathcal{F}\mathcal{F}_h u)(hn) \\
&= \frac{h}{2\pi} \sum_{hm \in \text{int}(G^\#)} u(hm) \sin\left(m\pi - \frac{\pi}{h}hn\right) + \frac{h}{2\pi} u(hn) \frac{2\pi}{h} \\
&= u(hn).
\end{aligned}$$

o que mostra que  $R_h \mathcal{F}\mathcal{F}_h u = u$ . □

2.  $\mathcal{F}_h R_h \mathcal{F} f = f$  com  $f \in L_2^0(Q_h)$ .

*Demonstração.*

Seja  $f \in L_2^0(Q_h)$ .

$$\begin{aligned}
R_h(\mathcal{F}f)(hm) = \mathcal{F}f(hm) &\Rightarrow \mathcal{F}_h(R_h(\mathcal{F}f(hm))) = \mathcal{F}_h(\mathcal{F}f(hm))(\xi) \\
&\Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{F}_h(\mathcal{F}f(hm))(\xi))(x) = \mathcal{F}f(x) \\
&\Rightarrow \mathcal{F}_h(\mathcal{F}f(hm))(\xi) = f(\xi).
\end{aligned}$$

Logo,  $\mathcal{F}_h R_h \mathcal{F} f = f$ . □

3.  $\mathcal{F}\mathcal{F}_h(R_h f) = f$  com  $f \in \text{Im}\mathcal{F}\{L_2^0(Q_h)\} \cap \ell_2(G^\#)$ .



*Demonstração.*

Pela propriedade anterior, se  $f \in L_2^0(Q_h)$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_h R_h(\mathcal{F}f) = f &\Rightarrow \mathcal{F}_h R_h \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}f) = \mathcal{F}^{-1}f \\ &\Rightarrow \mathcal{F}_h R_h f = \mathcal{F}^{-1}f \\ &\Rightarrow \mathcal{F} \mathcal{F}_h R_h f = \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1}f \\ &\Rightarrow \mathcal{F} \mathcal{F}_h R_h f = f\end{aligned}$$

□

# Capítulo 3

## Soluções Fundamentais de Operadores Discretos

Neste Capítulo, serão introduzidos dois operadores diferenciais importantes em aplicações físicas: os operadores de Laplace e de Dirac. Definidos estes operadores, vamos estabelecer os seus equivalentes discretos com recurso às definições introduzidas nos Capítulos 1 e 2 e construiremos as suas soluções fundamentais.

### 3.1 Noções Básicas sobre Quaterniões

Define-se a álgebra quaterniônica, denotada por  $\mathbb{H}$ , como sendo o espaço vectorial real  $\mathbb{R}^4$ , dotado de convenientes regras multiplicativas.

Seja  $\mathcal{B} = \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  uma base ortonormada para  $\mathbb{R}^4$ . Então o elemento  $q \in \mathbb{R}^4$  pode ser escrito como

$$q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3, \quad q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}.$$

Considerem-se agora as seguintes regras multiplicativas para os elementos da base  $\mathcal{B}$ :

1.  $e_0^2 = +1$ ;
2.  $e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1 e_2 e_3 = -1$ ;
3.  $e_0 e_j = e_j = e_j e_0, \quad j = 1, 2, 3$ .

Desta forma,  $e_0$  pode ser identificado com a unidade escalar 1 (o que será feito daqui em diante) e o vector  $q \in \mathbb{R}^4$  pode assim ser escrito como

$$q = q_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3 = q_0 + \vec{q},$$

onde  $\vec{q}$  é um vector de  $\mathbb{R}^3$ .

Convencionamos escrever  $q_0 = Sc(q)$  e  $\vec{q} = Vec(q)$ .

Note-se que a multiplicação de quaterniões não é comutativa. Por exemplo:

$$qp = (q_0 + \vec{q})(p_0 + \vec{p}) = q_0p_0 - \vec{q} \cdot \vec{p} + q_0\vec{p} + p_0\vec{q} + \vec{q} \times \vec{p},$$

onde  $\vec{q} \cdot \vec{p}$  denota o usual produto interno de vectores em  $\mathbb{R}^3$  e  $\vec{q} \times \vec{p}$  o usual produto externo de vectores em  $\mathbb{R}^3$ .

Assim, a álgebra  $\mathbb{H}$  pode ser vista como uma extensão da álgebra complexa  $\mathbb{C}$ . À semelhança dos números complexos, em  $\mathbb{H}$  também se define:

- Conjugado do quaterniões:  $\bar{q} = q_0 - \vec{q} = q_0 - q_1e_1 - q_2e_2 - q_3e_3$ ;
- Norma do quaterniões:  $|q|^2 = q\bar{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ , que coincide com a norma Euclidiana em  $\mathbb{R}^4$ ;
- Inverso do quaterniões:  $q^{-1} = \frac{1}{|q|^2}\bar{q}$  se  $q \neq 0$ .

Resta agora definir o que se entende por funções quaterniônicas.

Seja  $G$  um domínio (aberto e conexo) limitado de  $\mathbb{R}^4$ . Define-se a função quaterniônica  $f : G \rightarrow \mathbb{H}$  como sendo

$$f(q) = f_0(q) + f_1(q)e_1 + f_2(q)e_2 + f_3(q)e_3$$

e pode ser visto como uma função vectorial.

Definiremos os espaços para estas funções vias as respectivas funções coordenadas. Por exemplo, diremos que  $f$  é de classe  $C^k$  sse  $f_0, f_1, f_2, f_3 \in C^k(G)$ . De forma semelhante para o espaço  $L_p(G)$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

## 3.2 Conceito de Solução Fundamental

Considere-se aqui  $L$  um operador diferencial parcial de ordem  $N$ , em  $\mathbb{R}^{n+1}$  definido como

$$Lu(x) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha D_x^\alpha u(x),$$

onde  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ ,  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $|\alpha| = |\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n|$  e

$$D_x^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_0}^{\alpha_0} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}(x).$$

**Definição 3.1** (Solução Fundamental). *Diz-se que  $E \in C^\infty$  é uma solução fundamental do operador  $L$ , em sentido distribucional sse*

$$LE = \delta,$$

isto é

$$\langle LE, \phi \rangle = \langle \delta, \phi \rangle = \phi(0), \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Em analogia ao caso contínuo, definiremos de seguida os equivalentes discretos da distribuição delta de Dirac e da noção de solução fundamental.

Consideremos novamente a grelha  $G^\# \subset \mathbb{R}_h^3$ , sendo  $h = \Delta x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Seja  $hm$  um ponto da grelha  $G^\#$ , tal que  $hm = (hm_1, hm_2, hm_3)$ .

**Definição 3.2** (Distribuição Delta de Dirac discreta). *Define-se distribuição delta de Dirac discreta,  $\delta_h$ , por*

$$\delta_h(hm) = \begin{cases} h^{-3} & \text{se } m = 0 \\ 0 & \text{se } m \neq 0 \end{cases}.$$

A distribuição delta de Dirac possui uma propriedade importante, quando é relacionada com a transformada discreta de Fourier

$$\mathcal{F}_h \delta_h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}. \quad (3.1)$$

Para provar este facto, observemos

$$\mathcal{F}_h \delta_h(x) = \frac{h^3}{\sqrt{2\pi}^3} \sum_{x \in \mathbb{R}_h^3} \delta_h(x) e^{ix \cdot \xi}$$

com  $\xi \in Q_h$ . Assim,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_h \delta_h(x) &= \frac{h^3}{\sqrt{2\pi}^3} \left[ \delta_h(0) + \sum_{x \neq 0} \delta_h(x) e^{ix \cdot \xi} \right] \\ &= \frac{h^3}{\sqrt{2\pi}^3} h^{-3} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}.\end{aligned}$$

**Definição 3.3** (Solução Fundamental discreta). *Seja  $L_h$  um operador discreto. Temos que  $E_h$  é uma solução fundamental discreta de  $L_h$  se e só se*

$$L_h E_h = \delta_h.$$

### 3.3 Operador discreto de Laplace

Nesta secção, tem-se como objectivo determinar uma solução fundamental para o operador discreto de Laplace. Para isso, começaremos por introduzir a definição deste operador no caso contínuo e a seu equivalente no caso discreto. Seguidamente, serão demonstradas algumas propriedades relevantes para a construção de uma solução fundamental discreta, que será construída após uma breve referência a uma solução fundamental no caso contínuo.

#### 3.3.1 Definição e Propriedades

Em Matemática (e Física), o Laplaciano ou operador de Laplace é um operador diferencial e linear de segunda ordem e pode ser encontrado em diversas equações de derivadas parciais que modelam problemas físicos, como por exemplo, a equação da condução do calor.

**Definição 3.4** (Operador de Laplace). *Seja  $f$  uma função de  $G \subset \mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{H}$  com  $f \in C^2(G)$ . Definimos o operador de Laplace como*

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x).$$

Quando aplicamos a transformada de Fourier contínua a este operador obtemos algumas propriedades que iremos referir de seguida. Para uma referência das mesmas, ver [7]. Assim:

1.  $\mathcal{F}(-\Delta f) = |\xi|^2 \mathcal{F} f$  com  $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$
2.  $-\Delta(\mathcal{F} f) = \mathcal{F}|x|^2 f$  com  $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Analogamente ao caso contínuo, é possível definir este operador no caso discreto. Considere-se então uma função discreta,  $u : G^\# \rightarrow \mathbb{C}$ , com  $G^\# \subset \mathbb{R}_h^3$  e  $hm$  um ponto da grelha  $G^\#$ , tal que  $hm = (hm_1, hm_2, hm_3)$ .

Sejam

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a representação matricial dos geradores dos quaterniões reais, como representações da versão discreta da base espacial para o caso quaterniónico.

**Definição 3.5** (Operador discreto de Laplace). *Para um dado  $u$ , definimos o operador discreto de Laplace como*

$$\Delta_h u(x) = \sum_{j=1}^3 \partial_h^{-j} \partial_h^j u(hm),$$

onde

$$\partial_h^{\pm j} u(hm) = \frac{u(hm \pm h e_j) - u(hm)}{h}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Quando relacionado com a transformada de discreta de Fourier, o operador discreto de Laplace possui uma propriedade que se torna relevante na construção de uma solução fundamental.

$$\mathcal{F}_h(-\Delta_h u) = d^2 \mathcal{F}_h u, \quad (3.2)$$

onde  $d^2 = \frac{4}{h^2} \sum_{j=1}^3 \sin^2(\frac{h\xi_j}{2})$ .

### 3.3.2 Construção da solução fundamental

**Lema 3.1.** *Uma solução fundamental do operador de Laplace em  $\mathbb{R}^3$  é dada por*

$$E_{Lap} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}.$$

Seguidamente, iremos construir uma solução fundamental discreta para o operador de Laplace. Consideremos então  $hm$  um ponto da grelha  $G^\# \subset \mathbb{R}_h^3$ .

Considere-se também a equação de diferenças

$$-\Delta_h E_h(hm) = -\sum_{j=1}^3 \partial_h^{-j} \partial_h^j E_h(hm) = \delta_h(hm),$$

onde

$$|E_h(hm)| \leq c |hm|^k$$

para um certo  $k > 0$ .

**Lema 3.2.** *Uma solução fundamental discreta para o operador de Laplace é*

$$E_h(hm) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} R_h \mathcal{F}\left(\frac{1}{d^2}\right).$$

*Demonstração.*

Aplicando as Equações (3.1) e (3.2) à equação de diferenças apresentada anteriormente, obtemos a equação

$$\mathcal{F}_h E_h(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \frac{1}{d^2}.$$

Aplicando-lhe agora a transformada inversa de Fourier, vem que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h^{-1}(\mathcal{F}_h E_h(x)) &= \mathcal{F}_h^{-1}\left(\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \frac{1}{d^2}\right) \Leftrightarrow E_h(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \mathcal{F}_h^{-1}\left(\frac{1}{d^2}\right) \\ &\Leftrightarrow E_h(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} R_h \mathcal{F}\left(\frac{1}{d^2}\right). \end{aligned}$$

□

Observe-se que a equação da solução fundamental obtida no lema anterior pode ainda ser escrita na forma

$$E_h(m_1h, m_2h, m_3h) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{e^{-i(m_1h \cdot \xi_1 + m_2h \cdot \xi_2 + m_3h \cdot \xi_3)}}{d^2} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

com  $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$ .

### 3.4 Operador discreto de Dirac

Tal como na secção anterior, o objectivo desta secção é determinar uma solução fundamental para o operador discreto de Dirac. Assim, começaremos por introduzir a definição deste operador no caso contínuo e o seu equivalente discreto. Seguidamente, serão demonstradas algumas propriedades deste operador com ligação à transformada de Fourier que serão úteis na construção de uma solução fundamental discreta, que será determinada após uma breve referência a uma solução fundamental no caso contínuo.

#### 3.4.1 Definição e Propriedades

Para uma função  $f = f_0 + \vec{f}$  de  $G \subset \mathbb{R}^3$  e de classe  $C^1(G)$  temos

**Definição 3.6** (Operador de Dirac). *Definimos o operador de Dirac da função  $f$ ,  $Df$ , com  $x \in G$  como*

$$Df(x) = \sum_{i=1}^3 e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \begin{pmatrix} -\operatorname{div} \vec{f}(x) \\ \operatorname{grad} f_0(x) + \operatorname{rot} \vec{f}(x) \end{pmatrix}.$$

Tal como fizemos para o operador de Laplace, seguidamente será definido o equivalente ao operador de Dirac no caso discreto.

**Definição 3.7.** *Seja  $u = u_0 + \vec{u}$  uma função discreta de  $G^\#$  em  $\mathbb{H}$ . Definimos*

1. *Divergente de  $\vec{u}$  para trás e para a frente, respectivamente, como sendo*

$$\operatorname{div}_h^- \vec{u} = \partial_h^{-1} u_1 + \partial_h^{-2} u_2 + \partial_h^{-3} u_3,$$

$$\operatorname{div}_h^+ \vec{u} = \partial_h^{+1} u_1 + \partial_h^{+2} u_2 + \partial_h^{+3} u_3;$$



2. Gradiente de  $u_0$  para trás e para a frente, respectivamente, como sendo

$$\begin{aligned} \text{grad}_h^- u_h^0 &= (\partial_h^{-1} u_0) e_1 + (\partial_h^{-2} u_0) e_2 + (\partial_h^{-3} u_0) e_3, \\ \text{grad}_h^+ u_h^0 &= (\partial_h^{+1} u_0) e_1 + (\partial_h^{+2} u_0) e_2 + (\partial_h^{+3} u_0) e_3; \end{aligned}$$

3. Rotacional de  $\vec{u}$  para trás e para a frente, respectivamente, como sendo

$$\text{rot}_h^- \vec{u} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_h^{-1} & \partial_h^{-2} & \partial_h^{-3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \quad e \quad \text{rot}_h^+ \vec{u} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_h^{+1} & \partial_h^{+2} & \partial_h^{+3} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Assim, temos

**Definição 3.8** (Operador discreto de Dirac). *Chamamos operador discreto de Dirac para a frente e para trás da função  $u$ , respectivamente, a*

$$D_h^+ u = \begin{pmatrix} -\text{div}_h^- \vec{u} \\ \text{grad}_h^- u_0 + \text{rot}_h^+ \vec{u} \end{pmatrix} \quad e \quad D_h^- = \begin{pmatrix} -\text{div}_h^+ \vec{u} \\ \text{grad}_h^+ u_0 + \text{rot}_h^- \vec{u} \end{pmatrix}.$$

donde se utiliza a representação matricial para estes operadores

$$\begin{aligned} D_h^+ u &= \begin{pmatrix} 0 & -\partial_h^{-1} & -\partial_h^{-2} & -\partial_h^{-3} \\ \partial_h^{-1} & 0 & -\partial_h^3 & \partial_h^2 \\ \partial_h^{-2} & \partial_h^3 & 0 & -\partial_h^1 \\ \partial_h^{-3} & -\partial_h^2 & \partial_h^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}, \\ D_h^- &= \begin{pmatrix} 0 & -\partial_h^1 & -\partial_h^2 & -\partial_h^3 \\ \partial_h^1 & 0 & -\partial_h^{-3} & \partial_h^{-2} \\ \partial_h^2 & \partial_h^{-3} & 0 & -\partial_h^{-1} \\ \partial_h^3 & -\partial_h^{-2} & \partial_h^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Denotaremos por  $E_h^+$  e  $E_h^-$  as soluções fundamentais discretas dos operadores discretos de Dirac  $D_h^+$  e  $D_h^-$ , respectivamente.

Seguidamente, iremos demonstrar algumas propriedades da transformada de Fourier aplicada ao operador de Dirac.

1.  $\mathcal{F}_h(\partial_h^j u) = -\xi_{-j}^\partial \mathcal{F}_h u$  com  $\xi_{-j}^\partial = h^{-1}(1 - e^{-ih \cdot \xi_j})$  e  $j = 1, 2, 3$ .

*Demonstração.*

A demonstração desta propriedade será feita no caso em que  $j = 1$ , pois o mesmo resultado poderá ser obtido nos restantes casos, de forma análoga. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_h(\partial_h^{+j}u) &= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_{hm \in \mathbb{G}^\#} \frac{u(hm + he_j) - u(hm)}{h} e^{ihm \cdot \xi_1} \\
&= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{hm \in \mathbb{G}^\#} \frac{u[h(m + e_j)]}{h} e^{ihm \cdot \xi} - \sum_{hm \in \mathbb{G}^\#} \frac{u(hm)}{h} e^{ihm \cdot \xi} \right] \\
&= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{hm' \in \mathbb{G}^\#} \frac{u(hm')}{h} e^{ih(m' - e_j) \cdot \xi} - \sum_{hm \in \mathbb{G}^\#} \frac{u(hm)}{h} e^{ihm \cdot \xi} \right] \\
&= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{hm' \in \mathbb{G}^\#} \frac{u(hm')}{h} e^{ihm' \cdot \xi} e^{-ihe_j \cdot \xi} - \sum_{hm \in \mathbb{G}^\#} \frac{u(hm)}{h} e^{ihm \cdot \xi} \right] \\
&= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{hm' \in \mathbb{G}^\#} u(hm') e^{ihm' \cdot \xi} \frac{e^{-ih \cdot \xi_j}}{h} - \sum_{hm \in \mathbb{G}^\#} u(hm) e^{ihm \cdot \xi} \frac{1}{h} \right] \\
&= \frac{1}{h} (e^{-ih \cdot \xi_j} - 1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{hm \in \mathbb{G}^\#} u(hm) e^{ihm \cdot \xi} \\
&= -\xi_{-j}^\partial \mathcal{F}_h u.
\end{aligned}$$

□

2.  $\mathcal{F}_h(\partial_h^{-j}u) = \xi_j^\partial \mathcal{F}_h u$  com  $\xi_j^\partial = h^{-1} (1 - e^{-ih \cdot \xi_j})$  e  $j = 1, 2, 3$ .

*Demonstração.*

Tal como para a propriedade anterior, iremos demonstrar esta propriedade para o caso em que  $j = 1$ , pois o mesmo resultado poderá

serobtido nos restantes casos, de forma análoga. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_h(\partial_h^{-j}u) &= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \sum_{hm \in \mathbb{G}^\#} \frac{u(hm) - u[h(m + e_j)]}{h} e^{ihm \cdot \xi} \\
&= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{hm \in \mathbb{G}^\#} \frac{u(hm)}{h} e^{ihm \cdot \xi} - \sum_{hm \in \mathbb{G}^\#} \frac{u[h(m + e_j)]}{h} e^{ihm \cdot \xi} \right] \\
&= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{hm \in \mathbb{G}^\#} \frac{u(hm)}{h} e^{ihm \cdot \xi} - \sum_{hm' \in \mathbb{G}^\#} \frac{u(hm')}{h} e^{ih(m' - e_j) \cdot \xi} \right] \\
&= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{hm \in \mathbb{G}^\#} \frac{u(hm)}{h} e^{ihm \cdot \xi} - \sum_{hm' \in \mathbb{G}^\#} \frac{u(hm')}{h} e^{ihm' \cdot \xi} e^{-ih e_j \cdot \xi} \right] \\
&= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{hm \in \mathbb{G}^\#} u(hm) e^{ihm \cdot \xi} \frac{1}{h} - \sum_{hm' \in \mathbb{G}^\#} u(hm') e^{ihm' \cdot \xi} \frac{e^{-ih \cdot \xi_j}}{h} \right] \\
&= \frac{1}{h} (1 - e^{-ih \cdot \xi_j}) \sum_{hm \in \mathbb{G}^\#} u(hm) e^{ihm \cdot \xi} \\
&= \xi_j^\partial \mathcal{F}_h u.
\end{aligned}$$

□

### 3.4.2 Construção da solução fundamental

**Lema 3.3.** *A solução fundamental de Dirac tem a representação*

$$E(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|^3} (0, x_1, x_2, x_3)^T,$$

que é identificada com a matriz

$$E_{Dir}(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|^3} \begin{pmatrix} 0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & 0 & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & 0 & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

É de referir que, aplicando a transformada de Fourier à matriz de  $E_{Dir}(x)$ ,

obtém-se a seguinte representação matricial:

$$E_{Dir}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{F}\left(\frac{i\xi_1}{|\xi|^2}\right) & \mathcal{F}\left(\frac{i\xi_2}{|\xi|^2}\right) & \mathcal{F}\left(\frac{i\xi_3}{|\xi|^2}\right) \\ \mathcal{F}\left(\frac{-i\xi_1}{|\xi|^2}\right) & 0 & \mathcal{F}\left(\frac{i\xi_3}{|\xi|^2}\right) & \mathcal{F}\left(\frac{-i\xi_2}{|\xi|^2}\right) \\ \mathcal{F}\left(\frac{-i\xi_2}{|\xi|^2}\right) & \mathcal{F}\left(\frac{-i\xi_3}{|\xi|^2}\right) & 0 & \mathcal{F}\left(\frac{i\xi_1}{|\xi|^2}\right) \\ \mathcal{F}\left(\frac{-i\xi_3}{|\xi|^2}\right) & \mathcal{F}\left(\frac{i\xi_2}{|\xi|^2}\right) & \mathcal{F}\left(\frac{-i\xi_1}{|\xi|^2}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Seguidamente, iremos construir uma solução fundamental discreta para o perador discreto de Dirac.

**Lema 3.4.** *A solução fundamental discreta de Dirac tem a representação para a frente e para trás, respectivamente*

$$E_h^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \begin{pmatrix} 0 & R_h \mathcal{F}\left(\frac{\xi_{-1}^\partial}{d^2}\right) & R_h \mathcal{F}\left(\frac{\xi_{-2}^\partial}{d^2}\right) & R_h \mathcal{F}\left(\frac{\xi_{-3}^\partial}{d^2}\right) \\ R_h \mathcal{F}\left(-\frac{\xi_{-1}^\partial}{d^2}\right) & 0 & R_h \mathcal{F}\left(-\frac{\xi_{-3}^\partial}{d^2}\right) & R_h \mathcal{F}\left(\frac{\xi_{-2}^\partial}{d^2}\right) \\ R_h \mathcal{F}\left(-\frac{\xi_{-2}^\partial}{d^2}\right) & R_h \mathcal{F}\left(\frac{\xi_{-3}^\partial}{d^2}\right) & 0 & R_h \mathcal{F}\left(-\frac{\xi_{-1}^\partial}{d^2}\right) \\ R_h \mathcal{F}\left(-\frac{\xi_{-3}^\partial}{d^2}\right) & R_h \mathcal{F}\left(-\frac{\xi_{-2}^\partial}{d^2}\right) & R_h \mathcal{F}\left(\frac{\xi_{-1}^\partial}{d^2}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_h^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \begin{pmatrix} 0 & R_h \mathcal{F}\left(-\frac{\xi_1^\partial}{d^2}\right) & R_h \mathcal{F}\left(-\frac{\xi_2^\partial}{d^2}\right) & R_h \mathcal{F}\left(-\frac{\xi_3^\partial}{d^2}\right) \\ R_h \mathcal{F}\left(\frac{\xi_1^\partial}{d^2}\right) & 0 & R_h \mathcal{F}\left(\frac{\xi_{-3}^\partial}{d^2}\right) & R_h \mathcal{F}\left(-\frac{\xi_{-2}^\partial}{d^2}\right) \\ R_h \mathcal{F}\left(\frac{\xi_2^\partial}{d^2}\right) & R_h \mathcal{F}\left(-\frac{\xi_{-3}^\partial}{d^2}\right) & 0 & R_h \mathcal{F}\left(\frac{\xi_{-1}^\partial}{d^2}\right) \\ R_h \mathcal{F}\left(\frac{\xi_3^\partial}{d^2}\right) & R_h \mathcal{F}\left(\frac{\xi_{-2}^\partial}{d^2}\right) & R_h \mathcal{F}\left(-\frac{\xi_{-1}^\partial}{d^2}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

*Demonstração.*

Por definição,  $E_h^+(hm)$  é uma solução fundamental se

$$D_h^+ E_h^+(hm) = \delta_h(hm)I. \quad (3.3)$$

Aplicando a transformada discreta de Fourier à equação anterior vem que

$$(\mathcal{F}_h D_h^+ E_h^+)(\xi) = A^+(\mathcal{F}_h E_h^+)(\xi) \quad (3.4)$$

com

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_1^\partial & -\xi_2^\partial & -\xi_3^\partial \\ \xi_1^\partial & 0 & \xi_{-3}^\partial & -\xi_{-2}^\partial \\ \xi_2^\partial & -\xi_{-3}^\partial & 0 & \xi_{-1}^\partial \\ \xi_3^\partial & \xi_{-2}^\partial & -\xi_{-1}^\partial & 0 \end{pmatrix}$$

onde  $\xi_{\pm j}^\partial = \frac{1-e^{\pm ih \cdot \xi_j}}{h}$  e  $j = 1, 2, 3$ .

Aplicando agora a Equação (3.1) à Equação vem

$$(\mathcal{F}_h \delta_h I)(\xi) = A^+ (\mathcal{F}_h E_h^+)(\xi),$$

ou seja

$$(\mathcal{F}_h E_h^+)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} (A^+)^{-1}. \quad (3.5)$$

Por um raciocínio análogo, obtemos

$$A^- (\mathcal{F}_h E_h^-)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} I \quad (3.6)$$

com

$$A^- = \begin{pmatrix} 0 & \xi_{-1}^\partial & \xi_{-2}^\partial & \xi_{-3}^\partial \\ -\xi_{-1}^\partial & 0 & -\xi_3^\partial & \xi_2^\partial \\ -\xi_{-2}^\partial & \xi_3^\partial & 0 & -\xi_1^\partial \\ -\xi_{-3}^\partial & -\xi_2^\partial & \xi_1^\partial & 0 \end{pmatrix}$$

onde  $\xi_{\pm j}^\partial = \frac{1-e^{\pm ih \cdot \xi_j}}{h}$  e  $j = 1, 2, 3$ .

As matrizes  $A^+$  e  $A^-$  têm a seguinte propriedade

$$A^- A^+ = A^+ A^- = d^2 I$$

com  $d^2 = \frac{4}{h^2} \sum_{j=1}^3 \sin^2 \left( \frac{h\xi_j}{2} \right)$ .

Por simplicidade de cálculos, apresentaremos de seguida os cálculos da entrada  $(1, 1)$  da matriz  $A^- A^+$  dada por

$$\xi_{-1}^\partial \xi_1^\partial + \xi_{-2}^\partial \xi_2^\partial + \xi_{-3}^\partial \xi_3^\partial.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\xi_{-1}^\partial \xi_1^\partial &= \frac{(1 - e^{-ih \cdot \xi_1})}{h} \frac{(1 - e^{ih \cdot \xi_1})}{h} \\
&= \frac{2 - e^{ih \cdot \xi_1} - e^{-ih \cdot \xi_1}}{h^2} \\
&= \frac{2 - \cos(h\xi_1) - i \sin(h\xi_1) - \cos(h\xi_1) + i \sin(h\xi_1)}{h^2} \\
&= \frac{2}{h^2} (1 - \cos(h\xi_1)) \\
&= \frac{2}{h^2} \left( 1 - \cos\left(2 \frac{h\xi_1}{2}\right) \right) \\
&= \frac{2}{h^2} \left[ 1 - \left( \cos^2\left(\frac{h\xi_1}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{h\xi_1}{2}\right) \right) \right] \\
&= \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{h\xi_1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Por um raciocínio análogo, obtemos os cálculos para  $\xi_{-2}^\partial \xi_2^\partial$  e  $\xi_{-3}^\partial \xi_3^\partial$  sendo

$$\xi_{-2}^\partial \xi_2^\partial = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{h\xi_2}{2}\right),$$

$$\xi_{-3}^\partial \xi_3^\partial = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{h\xi_3}{2}\right).$$

Apresentados os cálculos dos elementos da diagonal da matriz  $A^- A^+$ , vamos agora estudar os elementos que não estão na diagonal desta mesma matriz. Sem perca de generalidade, apresentaremos os cálculos para a entrada  $(2, 1)$  de  $A^- A^+$ , sendo as outras obtidas por um raciocínio análogo. Assim, a entrada da matriz prentedida é dada por

$$0 + 0 - \xi_3^\partial \xi_2^\partial + \xi_2^\partial \xi_3^\partial = -\frac{(1 - e^{ih \cdot \xi_3})(1 - e^{ih \cdot \xi_2})}{h^2} + \frac{(1 - e^{ih \cdot \xi_2})(1 - e^{ih \cdot \xi_3})}{h^2} = 0.$$

Portanto temos que

$$A^- A^+ = \frac{4}{h^2} \sum_{j=1}^3 \sin^2\left(\frac{h\xi_j}{2}\right) I,$$

ou seja, fazendo  $d^2 = \frac{4}{h^2} \sum_{j=1}^3 \sin^2 \left( \frac{h\xi_j}{2} \right)$ , concluímos que

$$A^- A^+ = d^2 I.$$

Desta forma, podemos re-escrever as Equações (3.5) e (3.6), respectivamente como

$$(\mathcal{F}_h E_h^+)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \frac{1}{d^2} A^- \quad (3.7)$$

$$(\mathcal{F}_h E_h^-)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \frac{1}{d^2} A^+. \quad (3.8)$$

Finalmente, para obter a solução fundamental para a frente, aplicamos a transformada discreta de Fourier inversa à Equação (3.7).

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_h^{-1} \mathcal{F}_h E_h^+)(\xi) &= \mathcal{F}_h^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \frac{1}{d^2} A^- \right) \Leftrightarrow E_h^+(\xi) = R_h \mathcal{F} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \frac{1}{d^2} A^- \right) \\ &\Leftrightarrow E_h^+(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} R_h \mathcal{F} \left( \frac{1}{d^2} A^- \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$E_h^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \begin{pmatrix} 0 & R_h \mathcal{F} \left( \frac{\xi_{-1}^\partial}{d^2} \right) & R_h \mathcal{F} \left( \frac{\xi_{-2}^\partial}{d^2} \right) & R_h \mathcal{F} \left( \frac{\xi_{-3}^\partial}{d^2} \right) \\ R_h \mathcal{F} \left( -\frac{\xi_{-1}^\partial}{d^2} \right) & 0 & R_h \mathcal{F} \left( -\frac{\xi_{-3}^\partial}{d^2} \right) & R_h \mathcal{F} \left( \frac{\xi_2^\partial}{d^2} \right) \\ R_h \mathcal{F} \left( -\frac{\xi_{-2}^\partial}{d^2} \right) & R_h \mathcal{F} \left( \frac{\xi_3^\partial}{d^2} \right) & 0 & R_h \mathcal{F} \left( -\frac{\xi_1^\partial}{d^2} \right) \\ R_h \mathcal{F} \left( -\frac{\xi_{-3}^\partial}{d^2} \right) & R_h \mathcal{F} \left( -\frac{\xi_2^\partial}{d^2} \right) & R_h \mathcal{F} \left( \frac{\xi_1^\partial}{d^2} \right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, obtemos a solução fundamental para trás

$$E_h^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \begin{pmatrix} 0 & R_h \mathcal{F} \left( -\frac{\xi_1^\partial}{d^2} \right) & R_h \mathcal{F} \left( -\frac{\xi_2^\partial}{d^2} \right) & R_h \mathcal{F} \left( -\frac{\xi_3^\partial}{d^2} \right) \\ R_h \mathcal{F} \left( \frac{\xi_1^\partial}{d^2} \right) & 0 & R_h \mathcal{F} \left( \frac{\xi_{-3}^\partial}{d^2} \right) & R_h \mathcal{F} \left( -\frac{\xi_{-2}^\partial}{d^2} \right) \\ R_h \mathcal{F} \left( \frac{\xi_2^\partial}{d^2} \right) & R_h \mathcal{F} \left( -\frac{\xi_{-3}^\partial}{d^2} \right) & 0 & R_h \mathcal{F} \left( \frac{\xi_{-1}^\partial}{d^2} \right) \\ R_h \mathcal{F} \left( \frac{\xi_3^\partial}{d^2} \right) & R_h \mathcal{F} \left( \frac{\xi_{-2}^\partial}{d^2} \right) & R_h \mathcal{F} \left( -\frac{\xi_{-1}^\partial}{d^2} \right) & 0 \end{pmatrix}.$$

□

### 3.5 Relação entre os operadores discretos de Laplace e Dirac

Os operadores de Laplace e Dirac, estão estritamente interligados, quer no caso contínuo quer no caso discreto. O objectivo desta secção é mostrar propriedades comuns destes dois operadores, no caso contínuo e discreto.

**Lema 3.5.** *Seja  $f$  uma função quaterniônica com  $f \in C^2(G)$ . Então*

$$D^2f = -\Delta f$$

*Demonstração.*

Sejam  $Df = \sum_{i=1}^3 e_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$  e  $\Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ .

Então,

$$\begin{aligned} D^2f &= D(Df) = \sum_{i=1}^3 e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sum_{j=1}^3 e_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} e_i^2 + \sum_{i,j=1; i \neq j}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} e_i e_j \\ &= -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} e_1 e_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} e_2 e_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} e_1 e_3 + \\ &\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} e_3 e_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} e_2 e_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} e_3 e_2 \\ &= -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \\ &= -\Delta f. \end{aligned}$$

□

Consideremos agora os operadores discretos de Dirac definidos na secção anterior. Estes operadores, aplicados a uma função discreta  $u$ , representam os operadores de diferença espaciais, para a frente e para trás. Tais diferenças, factorizam a discretização do operador de Laplace, como se demonstrará no Lema seguinte.



**Lema 3.6.** *Sejam  $D_h^-$  e  $D_h^+$  os operadores de Dirac discretos para a frente e para a trás, respectivamente. Então*

$$D_h^- D_h^+ u = -(\Delta_h u) e_0.$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} (D_h^- D_h^+) u &= \begin{pmatrix} 0 & -\partial_h^1 & -\partial_h^2 & -\partial_h^3 \\ \partial_h^1 & 0 & -\partial_h^{-3} & \partial_h^{-2} \\ \partial_h^2 & \partial_h^{-3} & 0 & -\partial_h^{-1} \\ \partial_h^3 & -\partial_h^{-2} & \partial_h^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\partial_h^{-1} & -\partial_h^{-2} & -\partial_h^{-3} \\ \partial_h^{-1} & 0 & -\partial_h^3 & \partial_h^2 \\ \partial_h^{-2} & \partial_h^3 & 0 & -\partial_h^1 \\ \partial_h^{-3} & -\partial_h^2 & \partial_h^1 & 0 \end{pmatrix} u \\ &= -\sum_{j=1}^3 \partial^{-j} \partial^j u \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\left( \sum_{j=1}^3 \partial^{-j} \partial^j u \right) e_0 \\ &= -(\Delta_h u) e_0. \end{aligned}$$

□

Observe-se que o Lema anterior também é válido se multiplicarmos  $(D_h^+ D_h^-)u$  e que, em ambos os casos, podemos então escrever

$$(D_h^- D_h^+) u = (D_h^+ D_h^-) u = \begin{pmatrix} -\Delta_h u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta_h u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta_h u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta_h u \end{pmatrix}$$

# Conclusão

Este trabalho consistiu na construção de soluções fundamentais discretas para os operadores de Laplace e de Dirac. Para obtenção das mesmas, fez-se uma analogia destes operadores e suas soluções fundamentais ao caso contínuo.

É ainda de referir que as soluções fundamentais discretas encontradas para os operadores de Laplace e Dirac têm aplicações ao cálculos numérico dos operadores integrais para resolução de EDP's. Contudo, por falta de tempo, este tópico não foi abordado neste trabalho.

# Bibliografia

- [1] Anderson, Jr. J. D., *Computational Fluid Dynamics - The basics with applications*, New York, McGraw-Hill, (1995).
- [2] Yosida, K., *Functional Analysis, 6th edition*, New York, Springer-Berlag, (1980).
- [3] Figueiredo, D. G., *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, Brasilia, Projecto Euclides, (1987).
- [4] Schneider, R. (2000) *Wavelets and Signal Processing*, Sommersemester (2000).
- [5] Chui, C. K., *An Introduction to Wavelets in Wavelet Analysis and its Applications, Vol.I*, Academic Press, Inc, (1992).
- [6] Cerejeiras, P. et al, *Numerical Clifford Analysis for Nonlinear Schrödinger Problem*, Numer. Methods Partial Differ. Equations 24, No. 4, 1181-1202 (2008). MSC2000: \*65M70.
- [7] Gürlebeck, K. and Spössig, W., *Quaternionic and Clifford Calculus for Engineers and Physicists*, John Wiley and Sons, Cinchester, (1997).
- [8] Gürlebeck, K. and Hömmel, A. (2001) *On Finite Difference Dirac Operators and Their Fundamental Solutions*, Advances in Applied Clifford Algebras **11(S2)**, 89-106.